**§55**

Тригонометрические

ряды Фурье

**55.1. Определение ряда Фурье.**

**Постановка основных задач**

**Определение 1.** *Ряд вида*

 (55.1)

*называется тригонометрическим рядом.*

Его частичные суммы являются линейными комбинациями функций, входящих в систему

 (55.2)

Простые примеры сходящихся тригонометрических рядов дают ранее рассмотренные ряды

 

 



(см. пример 6 в п. 36.3).

**Определение 2.** *Множество функций (55.2) называется тригонометрической системой.*

**Л Е М М А 1.** *Тригонометрическая система (55.2) обладает следующими свойствами:*

 Интеграл по отрезку [−π, π] от произведения двух различных функций, входящих в нее, равен нулю (это свойство называется ортогональностью[[1]](#footnote-1) системы (55.2)), т. е.



 (55.3)



  (55.4)

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любых целых неотрицательных m, n таких, что m ≠ n, имеем





Аналогично доказываются и два других равенства (55.3).

Докажем теперь свойство (55.4):





**Т Е О Р Е М А 1.** Пусть

 (55.5)

и ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится равномерно на отрезке [−π, π]. Тогда



 (55.6)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку ряд, стоящий в правой части равенства (55.5), сходится равномерно на отрезке [−π, π], а все его члены являются непрерывными на этом отрезке функциями, то и его сумма f(x) непрерывна на отрезке [−π, π], а сам ряд можно почленно интегрировать (см. п. 32.4) от −π до π:



 

Отсюда следует первая из формул (55.6).

Если ряд (55.5) почленно помножить на cos nx и sin nx (n = 1, 2, ...), то полученные ряды будут также равномерно сходиться на отрезке [−π, π] (см. свойство 2° в п. 32.3). Интегрируя почленно эти ряды и используя свойство ортогональности (55.3) тригонометрической системы и равенства (55.4), будем иметь





Из полученных соотношений непосредственно вытекают остальные формулы (55.6). □

Теперь заметим, что интегралы (55.6) имеют смысл не только для функций, непрерывных на отрезке [−π, π], а также, например, и для функций, интегралы от которых абсолютно сходятся на этом отрезке.

Напомним, что понятие абсолютно сходящегося интеграла (как и просто сходящегося интеграла) было введено для функций, определенных на некотором промежутке с концами a и b, , для которых существует такое конечное множество точек

расширенной числовой прямой R̅ (см. п. 3.1), что функция интегрируема по Риману на любом отрезке [ξ, η], лежащем в заданном промежутке и не содержащем ни одной из точек 

Всякое конечное множество точек обладающее указанными выше свойствами, будем называть *правильным разбиением* промежутка интегрирования функции f. Очевидно, что если к правильному разбиению рассматриваемо­го промежутка добавить любое конечное множество точек этого промежутка и расположить точки получившегося множества в порядке возрастания, то получится снова правильное разбиение.

Если все интегралы сходятся, то можно определить интеграл. Он определяется равенством



и называется *сходящимся интегралом*.

Отметим, что значение интеграла  не зависит от выбора правильного разбиения промежутка интегрирования.

Если сходится интеграл , то интеграл  также сходится и называется *абсолютно сходящимся* (см. п. 33.5), а функция f — *абсолютно интегрируемой* на рассматриваемом промежутке.

Отметим, что если функция интегрируема по Риману на некотором отрезке, то ее абсолютная величина также интегрируема по Риману на нем (см. п. 28.1) и, следовательно, функция, интегрируемая по Риману на отрезке, абсолютно интегрируема на нем.

Если интеграл от функции f абсолютно сходится на отрезке [−π, π], то для нее все интегралы (55.6) также сходятся, так как они представляют собой интегралы от произведения абсолютно интегрируемой функции f(х) на непрерывную (синус или косинус), а такие интегралы абсолютно сходятся (см. лемму 2 в п. 29.5).

**Определение 3.** *Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке [−****π****,****π****]. Тригонометрический ряд (55.1), коэффициенты которого задаются формулами (55.6), называется рядом Фурье[[2]](#footnote-2) или, более подробно, тригонометрическим рядом Фурье, а числа an и bn — коэффициентами Фурье функции f.*

В этом случае пишут



Частотные суммы порядка n этого ряда будем обозначать через или, короче, и называть *суммами Фурье порядка n функции f*.

Подчеркнем, что здесь знак ~ обозначает не асимптотическое равенство, а просто соответствие: функции сопоставляется ее ряд Фурье.

Теорему 1 в этих терминах можно перефразировать следующим образом:

*всякий равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.*

*УПРАЖНЕНИЯ. 1.* Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке [−π, π] и пусть



Тогда если функция f — четная, то  Если же f — нечетная функция, то  
2. Является ли тригонометрический ряд рядом Фурье?

В этом параграфе будут изучаться периодические функции f для каждой из которых существует число такое, что при всех х, принадлежащих области определения функции f значения  и также принадлежат этой области и выполняется равенство



Такие функции называются Т-периодическими.

Пусть f абсолютно интегрируема на отрезке [−π, π] и, следовательно, ей можно сопоставить ряд Фурье. Если он сходится на некотором множестве, то сходится к 2π-периодической функции, так как все его члены 2π-периодичны. Поэтому бывает удобно и саму функцию f «периодически продолжить» с периодом 2π. Кавычки поставлены потому, что в действительности функцию f можно продолжить периодически только в случае, когда .

Если это условие не выполнено, то *продолжением функции* f назовем 2π-периодическую функцию f̃, которую получим, полагая для любой точки

в которой определена функция f (напомним, что, в силу абсолютной интегрируемоc-

1. Происхождение термина «ортогональность» будет разъяснено в п. 58.1. [↑](#footnote-ref-1)
2. Ж. Фурье (1768—1830) — французский физик и математик. [↑](#footnote-ref-2)